

Übungen zur Analysis 2

Blatt 8

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 04.12.2008

Aufgabe 38

(4 Punkte)

Gegeben sei das Parameterintegral $y(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

(a) Zeige: y ist differenzierbar auf \mathbb{R} , und es gilt $y'(x) = -xy(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Berechne $y(x)$. Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

Aufgabe 39

(4 Punkte)

Berechne die folgenden iterierten Integrale:

(a) $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{-x^2} \cos t dx \right) dt$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \pi x \cos(\pi xt) dx \right) dt$.

Aufgabe 40

(4 Punkte)

(a) Beweise, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $f_x(x, y) = y$ und $f_y(x, y) = xy$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Es sei $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $f(0, 0) = 0$. Zeige, dass f_{xy} und f_{yx} auf ganz \mathbb{R}^2 existieren und berechne $f_{xy}(0, 0)$, sowie $f_{yx}(0, 0)$. Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

Aufgabe 41

(6 Punkte)

Berechne, falls existent, die partiellen Ableitungen 1. Ordnung folgender Funktionen:

(a) $f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - 4y^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) $f(r, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \psi \cos \varphi \\ r \sin \psi \sin \varphi \\ r \cos \psi \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(c) $f(x) = |x - a|^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (bei gegebenem $a \in \mathbb{R}^n$).

Aufgabe 42 (Schwerpunkt)

(4 Punkte)

Es seien $m_\nu > 0$, $x_\nu \in \mathbb{R}^n$ für $\nu = 1, \dots, k$, $M := \sum_{\nu=1}^k m_\nu$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sum_{\nu=1}^k m_\nu |x - x_\nu|^2$. Berechne $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\text{grad } f(x_0) = 0$.

<http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/>